Chapter 3 关系

元组（Tuples）

有序元组：有序元组中为第一个元素，为第二个元素，以此类推。二元组又被称为有序对。

相等：两个元组相等当且仅当它们的每个对应元素都相等。

笛卡尔积（Cartesian Product）：集合的笛卡尔积是由中元素组成的有序对集合，定义式为。拓展到多个集合上时有

关系（Relation）：从到的关系是笛卡尔积的一个子集，也被称为从到的二元关系。

矩阵表示：使用矩阵表示关系时，有

有向图表示：使用有向图表示关系时，使用从到的有向边表示二元关系。如果节点之间的最短路径长度为，则称关系是的。

定义域（Domain）：

值域（Range）：

逆（Inverse）：

关系的复合：假设存在两个关系，则两个关系的复合为

计算性质

关系的属性

自反性（Reflexive）：对于每个，都有（）。

定理：上的关系满足自反性当且仅当。

矩阵表达：主对角线上元素均为1。

有向图表达：图中的每个顶点都有环。

反自反性（Irreflexive）：对于每个，都有。

定理：上的关系满足反自反性当且仅当。

矩阵表达：主对角线上元素均为0。

有向图表达：图中的每个顶点都没有环。

对称性（Symmetric）：对于每组，都有。

定理：上的关系满足对称性当且仅当。

矩阵表达：当为1时，也为1。

有向图表达：若图中存在边，则必存在边。

反对称性（Antisymmetric）：对于每组，若有，则。

定理：上的关系满足反对称性当且仅当。

矩阵表达：当为1时，为0。

有向图表达：若图中存在边，则必不存在边。

传递性（Transitive）：，若有，则有

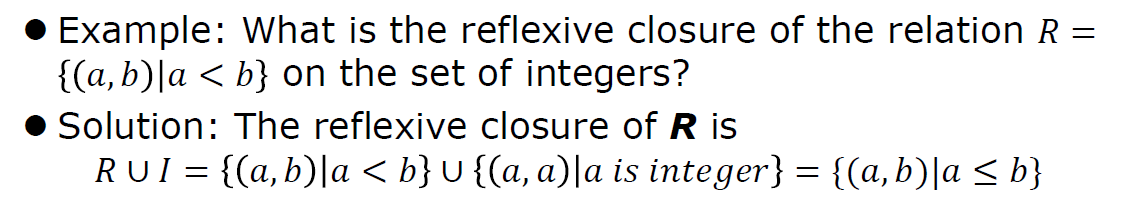
定理：

* + 1. 上的关系满足传递性当且仅当。
    2. 若关系是自反且对称的，则是自反且对称的。
    3. 若关系是传递的，则是传递的。

有向图表达：若图中含有边，则必存在边。

等价性（Equivalence）：满足自反性、对称性、传递性的关系。

关系闭包（Closure of a relation）：在上的关系对于属性的闭包，是带有关系且满足属性的在上的子集。（取并集）



等价类：假设上有关系，则对于任意，，是的表示元素。

定理：

假设是上的等价关系，则。

假设是上的等价关系，则对于任意的，有或。

假设是上的等价关系，则。

商集（Quotient set）：假设是上的等价关系，则，理解为只满足该属性的集合。

分割（Partition）：集合上的分割是一个非空集合，满足如下条件：

等价类和分割的对应关系：

从分割到等价类：是上的一个分割，则

。

从等价类到分割：是上的一个等价类，则的商集是的一个分割。

偏序关系（Partial Order）

定义：上满足自反性、反对称性、传递性的关系，用表示。

偏序上的严格小于满足：

可比较性：和是可比较的当且仅当存在。

全序：在上的关系是全序的，则，和是可比较的。

良序关系（Well-ordered set）：是偏序关系集，且每个的非空子集都含有一个最小元素。

字典序（Lexicographic ordering）：给定两个偏序关系，上的字典序定义为小于。定义为或且。注意此处需要依元素顺序进行比较。

哈斯图

覆盖：在偏序关系上，覆盖即且不存在使得。

最大/最小元素（Greatest/least elements）：在偏序关系上，有，则对于集合的最大元素；反之，对于集合的最小元素。最大最小元素是唯一的且不一定存在。

极大/极小元素（Maximal/minimal elements）：在偏序关系上，有，则对于集合的极大元素，若，则有；反之，对于集合的极小元素，若，则有。极大极小元素不唯一。

上/下界（Upper/lower bounds）：在偏序关系上，有。若是的上界，则；若是的下界，则。上下界不唯一。

拓扑排序（Topology sorting）：由某个集合上的一个偏序得到该集合上的一个全序。该排序基于假设“每个非空偏序都有至少一个极小元素”。